SUBJECT:

عندما $a = m$ العلاقة السابقة تفشل وبالتالي سنضرب كما في الخطوة السابقة أن

$$\frac{1}{D^2-a^2}\cdot \sinh ax = \frac{x}{2a}\cdot \cosh ax .$$

مثال: أوجد ناتج $(D^4-3D^2+2)e^{2x}\cdot x^2$

$$= e^{2x}[(D+2)^4 - 3(D+2)^2 + 2]\cdot x^2$$

$$= e^{2x}[D^4 + 4D^3\cdot 2 + 6D^2\cdot 2^2 + 4D2^3 + 2^4 - 3D^2 - 12D - 12 + 2]x^2$$

المشتقة الرابعة لـ x

$$= e^{2x}[D^4 + 8D^3 + 21D^2 + 20D + 6]x^2$$

$$= e^{2x}[0 + 0 + 21(2) + 40x + 6x^2]$$

$$= e^{2x}[6x^2 + 40x + 42]$$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

حالة خاصة:

$$(D-M)^2\cdot e^{mx}\cdot x^4 = e^{mx}(D+m-m)^\ell\cdot x^n$$

$$= e^{mx}\cdot D^\ell\cdot x^n = e^{mx}\cdot 0 \quad , \quad \ell > n$$

يجب أن نميز بين $n, \ell \Leftarrow \ell > m$ ، $n > \ell$

عندما $\ell \le n$ فإنه يكون:

$$(D-m)^\ell\cdot e^{mx}\cdot x^n = \frac{n!}{(n-\ell)!}\cdot x^{n-\ell}\cdot e^{mx}$$

مثال: $D^2\cdot x^5 = D(Dx^5)\cdot D(5x^4) = 20x^3$

$$D^2 x^5 = \frac{5!}{(5-2)!} x^3 = 5 \cdot 4 x^3 = 20 x^3$$

$$\varphi(D) \cdot e^{mx} \cdot u(x) = e^{mx} \cdot \varphi(D+m)\, u(x)$$

$$(D-m)^{\ell} \cdot e^{mx} \cdot x^n = \frac{n!}{(n-\ell)!} e^{mx} \cdot x^{n-\ell} \quad , \ell \leq n$$

$$(D-m)^{\ell} \cdot e^{mx} \cdot x^n = 0 \quad ; \ell > n$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج بأن المجموعة مجموعة الدوال $\{x^k \cdot e^{mx}\}_{k=0}^{\ell-1}$ تشكل قاعدة الحلول ~~للمعادلة التفاضلية الخطية~~ $(D-m)^{\ell} \cdot y = 0$

$y_1 = e^{mx}$ $\quad y_2 = x \cdot e^{mx}$ $\quad y_3 = x^2 \cdot e^{mx}$ $\quad . y_\ell = x^{\ell-1} \cdot e^{mx}$

وكل دالة من هذه الدوال تحقق المعادلة التفاضلية

$$(D-m)^{\ell} \cdot e^{mx} \cdot x^{\ell-1} = e^{mx} \cdot (D+m-m)^{\ell} \cdot x^{\ell-1}$$
$$= e^{mx} \cdot D^{\ell} \cdot x^{\ell-1} = 0$$

مثال توضيحي:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$$
$$(D-1)^3 \cdot y = 0$$

لهذه المعادلة التفاضلية حلول خاصة مستقلة هي:

$y_1 = e^x \quad , \quad y_2 = x \cdot e^x \quad \quad y_3 = x^2 \cdot e^x$

وبالتالي فإن الحل العام هو:

$$y_h = e^x (A_1 + A_2 x + A_3 x^2)$$

8- الدوال $chmx$ ، $shmx$ هي دوال مميزة للمؤثر التفاضلي "الناظم" كثير الحدود $\varphi(D^2)$ وقيمة مميزة مقدارها $\varphi(D^2)$ أي أن:

$$\varphi(D^2) \cdot chmx = \varphi(m^2) \cdot chmx$$

SUBJECT:

$$\varphi(D^2).\operatorname{sh} mx = \varphi(m^2).\operatorname{sh} mx$$

الإثبات:

$$D^2.\operatorname{ch} mx = D.D.\operatorname{ch} mx$$
$$= D.m.\operatorname{sh} mx$$
$$D^{2j}.\operatorname{ch} mx = m^{2j}.\operatorname{ch} mx$$

وبالتالي فإن:

$$\varphi(D^2).\operatorname{ch} mx = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{2j}.\operatorname{ch} mx$$

$$= \sum_{j=0}^{m} .a_j.m^{2j}.\operatorname{ch} mx$$

أي أن: $\varphi(D^2).\operatorname{ch} mx = \varphi(m^2).\operatorname{ch} mx$

بشكل مشابه تماماً نثبت صحة العلاقة الثانية.

ملاحظة هامة:

هذه الخاصة تفيدنا بتخفيض درجة المؤثر المفاضل من الدرجات العليا إلى الدرجة الأولى كما في المثال التالي:

مثال توضيحي:

أوجد ناتج ما يلي: $(D^6+2D^5-3D^4+2D^3+D^2+3D+1)\operatorname{ch}2x$

الحل: ($m=2,\ m^2=4$)

$$((D^2)^3+2(D^2)^2.D-3(D^2)^2+2D^2.D-3D+1)\operatorname{ch}2x$$

نضع بدلاً من D^2: m^2

$$(4)^3+2(4)^2.D-3(4)^2+2(4).D+4-3D+1).\operatorname{ch}2x$$

$$(64+32D-48+8D+4-3D+1)\operatorname{ch}2x$$

$$=(37D+21)\operatorname{ch}2x = 37D.\operatorname{ch}2x+21.\operatorname{ch}2x = 74\operatorname{sh}2x+21.\operatorname{ch}2x$$

(مشتق)

SUBJECT: / /

9- إن الدوال " $\sin mx$ ، $\cos mx$ " هي دوال مستمرة مميزة للمؤثر التفاضلي $\varphi(D^2)$ بقيمة مميزة مقدارها $\varphi(-m^2)$ أي أنه:

$$\varphi(D^2).\sin mx=\varphi(-m^2).\sin mx$$

$$\varphi(D^2).\cos mx=\varphi(-m^2).\cos mx$$

الإثبات:

$$D^2.\cos mx=D.D.\cos mx$$

$$=D(-m.\sin mx)=-m^2.\cos mx$$

بشكل عام فإن:

$$D^{2j}.\cos mx=(-m^2)^j.\cos mx$$

وبالتالي:

$$\varphi(D^2).\cos mx=\sum_{j=0}^{n}a_j.D^{2j}.\cos mx$$

$$=\sum_{j=0}^{n}a_j(-m^2)^j.\cos mx=\varphi(-m^2)\ \cos mx$$

وبنفس الطريقة نثبت صحة الخاصة السابقة.

★ملاحظة هامة:

هذه الخاصة تفيد في تخفيض درجة المؤثر المفاضل من الدرجات العليا إلى الدرجة الأولى ومن ثم نشتقها مرة واحدة كما في المثال الآتي:

★مثال توضيحي:

أوجد ناتج $(D^7-2D^6+5D^3+2D^2-3D+6).\sin x$

الحل:

$$[(D^2)^3.D-2(D^2)^3+5D^2.D+2D^2-3D+6].\sin x$$

$$=[(-1)^3.D-2(-1)^3+5(-1)^2.D+2(-1)-3D+6].\sin x \quad (m=1\ ;\ -m^2=-1)$$

$$=[-D+2-5D-2-3D+6].\sin x$$

$$=[-9D+6].\sin x=-9D.\sin x+6\sin x=-9\cos x+6\sin x$$

10- المؤثر التفاضلي "المفاضل" كثير الحدود جداء دالتين إحداهما هي x

$$\varphi(D).x.u(x)=x.\varphi(D).u(x)+\varphi'(D).u(x) \quad (n+1)$$

الإثبات:

تذكرة: $(u.v)^n = u^n.v + n.u^{n-1}.v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{n-2}.v'' + \dots + u.v^n$

$$D^k(x.u) = (x.u)^k = u^k x + k.u^{k-1}.x' + \frac{k(k-1)}{2!}.u^{k-2}.x''$$

استناداً إلى علاقة ليبنتز للمشتقات العليا نجد أن:

$$D^k.x.u(x) = x.u^k + k.x'.u^{k-1}$$

$$D^k.x.u(x) = x.D^k.u + k.D^{k-1}.u(x)$$

$$= x.D^k.u + \frac{d}{dD} D^k.u$$

ومنه فإن:

$$\varphi(D).x.u(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.D^k.x.u(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[x.D^k.u + \frac{d}{dD}.D^k.u(x) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x.D^x.u + \sum_{k=0}^{n} a_n \frac{d}{dD}.D^k.u(x)$$

$$= x.\sum_{k=0}^{n} a_k.D^k.u(x) + \frac{d}{dD}.\sum_{k=0}^{m} a_k.D^k u(x)$$

$$= x.\varphi(D).u(x) + \varphi'(D).u(x)$$

مثال توضيحي:

أوجد بطريقتين مختلفتين ناتج ما يلي: $(D^3-2D+3).e^{-x}.x = 0$

الحل:

★ طريقة أولى:

طريقة الزحزحة الأسية:

$$[D^3-2D+3]e^{-x}.x = e^{-x}[(D-1)^3-2(D-1)+3]x$$

$$= e^{-x}[D^3-3D^2+3D-1-2D+2+3]x$$

SUBJECT: / /

$= e^{-x}[D^3 - 3D^2 + D + 4]x$

$= e^{-x}[0 - 0 + 1 + 4x] = e^{-x}(4x+1)$

* طريقة ثانية:

باستخدام العلاقة $\varphi(D).x.u(x) = x.\varphi(D).u(x) + \varphi'(D).u(x)$

$(D^3-2D+3)\,x.e^{-x} = x(D^3-2D+3).e^{-x} + (3D^2-2).e^{-x}$

$(f(D).e^{mx} = \varphi(m).e^{mx})$

$= x[(-1)^3 - 2(-1) + 3]e^{-x} + (3(-1)^2-2)e^{-x}$

$= x[-1+5].e^{-x} + e^{-x}$

$= e^{-x}[4x+1]$

* تعميم القاعدة السابقة:

المؤثر التفاضلي $\varphi(D)$ و جداء دالتين بإحداهما x^2

$\varphi(D).x^2.u(x) = x^2\varphi(D).u(x) + 2x.\varphi'(D).u(x) + \varphi''(D).u(x)$

الإثبات: $\varphi(D).x.x.u(x) = x.\dfrac{\varphi(D).x.u(x)}{x.\varphi(D).u(x)} + \varphi'(D)x.u(x)$

$= x[x.\varphi(D).u(x) + \varphi'(D).u(x)] + x\varphi'(D).u(x) + \varphi''(D).u(x)$

$= x^2.\varphi(D).u(x) + 2x.\varphi'(D).u(x) + \varphi''.u(x).$ (*) (المعاملات x^2+2x+1)

$\varphi(D).x^3.u(x) = x^3.\varphi(D).u(x) + 3x^2.\varphi'(D).u(x) + 3x\varphi''(D).u(x) + \varphi'''(D).u(x)$

مثال:

أوجد ناتج: جداء دالتين إحداهما x^2 $(D^4-3D^2+3D+1)\,x^2.\cos x$

الحل:

اعتماداً على العلاقة (*)

$= x^2(D^4-3D^2+3D+1).\cos x + 2x(4D^3-6D+3).\cos x +$

~~$(12D^3-6)$~~ $\cos x$

$(12D^2-6)$

SUBJECT:

$$= x^2 \left((-1)^2 - 3(-1) + 3D + 1\right).\cos x + 2x\left(4(-1)D - 6D + 3\right).\cos x + \left(12(-1) - 6\right).\cos x$$

تذكرة:

$$\left(\varphi(D).x^4 . u(x)\right) = x^4.\varphi(D).u(x) + 4x^3.\varphi'(D).u(x) + 6x^2.\varphi''(D).u(x) + 4x.\varphi'''(D).u(x) + \varphi''''(D).u(x)$$

★ المؤثر التفاضلي العكسي:

نعرف المؤثر التفاضلي العكسي الذي نرمز له بـ $\frac{1}{D} = D^{-1}$ بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على Dy كان الناتج هو الدالة y أي أن:

$$\frac{1}{D}.Dy = D^{-1}.Dy = y$$

$$\frac{1}{D}\,D = D^{-1}.D^{1} = 1$$

نستنتج أن المؤثر التفاضلي العكسي هو عملية تكامل ونعرف المؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D^n} = D^{-n}$ بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على $D^n y$ كان الناتج هو الدالة y؛ أي أن:

$$\frac{1}{D^n}.D^n y = D^{-n}.D^n.y = y$$

$$\frac{1}{D^n}.D^n = D^{-n}.D^n = 1$$

مثال:

$$\frac{1}{D^3}.e^{2x} = \frac{1}{D^2}.\frac{1}{D}.e^{2x} = \frac{1}{D^2}.\frac{e^{2x}}{2} + A$$

$$= \frac{1}{D}.\frac{1}{D}.\frac{e^{2x}}{2} + A = \frac{1}{D}.\frac{e^{2x}}{4} + Ax + B = \frac{e^{2x}}{8} + \frac{A}{2}x^2 + Bx + c$$

$$-\cos x + c = \frac{1}{D}.\sin x$$

بحيث أنه يجب أن يكون: $D^3\left(\frac{A}{2}x^2 + Bx + c\right) = 0$

ملاحظة: معروف بأن عملية تكامل أي دالة معروفة بحدود ثابت جمعي مثلاً عندما يكون $\frac{1}{D}$ هنا لدينا عملية تكامل مرة واحدة والثابت هو ثابت كيفي بحيث أن تأثير المؤثر للتفاضل D على هذا

AL DOUHA

SUBJECT: / /

الثالث يساوي الصفر.

وكذلك في المثال السابق ناتج تأثير $\frac{1}{D^3}$ على الدالة e^{2x} هو $\frac{e^{2x}}{8}$ مضافاً إليها كثير حدود من الدرجة الثانية.

لذلك فإن $D^3(\frac{A}{2}x^2 + Bx + c) = 0$.

والآن: بشكل عام نعرف المؤثر التفاضلي العكسي كثير الحدود بالشكل $\varphi^{-1}(D) = \frac{1}{\varphi(D)}$ بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على المقدار $\varphi(D).y$ كان الناتج y.

أي أن

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \varphi(D).y = \varphi^{-1}(D).\varphi(D).y = y$$

و $\varphi(D)$ كثير حدود تفاضلي من الدرجة n.

- بناءً على هذا فإنه إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية $\varphi(D).y = F(x)$

فلإيجاد حل خاص لهذه المعادلة نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\varphi(D)}$ أي أنه:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \varphi(D).y = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot F(x)$$

$$y = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot F(x) + N(x)$$

بحيث أنه $\varphi(D).N(x) = 0$

$$\varphi(D).y = 0$$

وهذا يعني أن $N(x)$ هي حل المعادلة التفاضلية

$$\varphi(D).y = 0$$

لذلك أينما ظهرت $N(x)$ ويمكن الاستغناء عنها لأنها جزء من الحل العام للمعادلة التفاضلية.